

## DETALJNI IZVEDBENI NASTAVNI PLAN PREDMETA

Opće informacije		
<b>Naziv predmeta</b>	Teorija brojeva	
<b>Studijski program</b>	Diplomski studij Diskretna matematika i primjene	
<b>Godina</b>	2.	
<b>Status predmeta</b>	Obvezatan	
<b>Web stranica predmeta</b>	Merlin	
<b>Mogućnost izvođenja nastave na engleskom jeziku</b>	Prema potrebi	
<b>Bodovna vrijednost i način izvođenja nastave</b>	<b>ECTS koeficijent opterećenja studenata</b>	6
	<b>Broj sati (P+V+S)</b>	30+30+0
<b>Nositelj predmeta</b>	<b>Ime i prezime</b>	dr. sc. Ana Jursić, docent
	<b>Ured</b>	O-304
	<b>Vrijeme za konzultacije</b>	Prema potrebi i dogovoru e-mailom
	<b>Telefon</b>	584-662
	<b>e-adresa</b>	ajurasic@math.uniri.hr
<b>Suradnici na predmetu</b>	<b>Ime i prezime</b>	-
	<b>Ured</b>	
	<b>Vrijeme za konzultacije</b>	
	<b>Telefon</b>	
	<b>e-adresa</b>	

### 1. OPIS PREDMETA

#### 1.1. Ciljevi predmeta

Teorija brojeva je područje matematike koje je svojim jednostavno iskazanim, ali vrlo teškim problemima (od kojih su neki rješavani ili se rješavaju stoljećima), oduvijek bilo motivacija i pokretač čitave matematike. U rješavanju tih problema primjenjuju se najnovija saznanja iz algebre, analize i geometrije. Osnovni cilj kolegija jest upoznati studente s načinima razmišljanja i dokazivanja tvrdnji u teoriji brojeva, a posebno upoznati algebarske i analitičke metode u teoriji brojeva. U tu je svrhu u okviru kolegija potrebno:

- Analizirati osnovna svojstva cijelih brojeva: djeljivost, prosti brojevi, rastav broja na proste faktore, Euklidov algoritam, kongruencije.
- Opisati rješenja kvadratne kongruencije koristeći Legendreov simbol te usporediti takve kongruencije kroz kvadratni zakon reciprociteta.
- Analizirati kvadratne forme i prikazivost cijelih brojeva kvadratnim formama te analizirati prikazivost cijelih brojeva kao sume određenog broja potpunih kvadrata.
- Definirati aritmetičke funkcije i usporediti osnovne primjere.
- Razlikovati osnovne tipove diofantskih jednadžbi i opisati načine njihova rješavanja.
- Definirati eliptičke krivulje, analizirati njihova svojstva i primjene u teoriji brojeva.
- Primijeniti teoriju brojeva u kriptografiji javnog ključa.
- Ukratko opisati algebarske metode teorije brojeva te njihovu primjenu.

- Ukratko opisati analitičke metode teorije brojeva te njihovu primjenu.

## 1.2. Korelativnost i korespondentnost predmeta

Nema uvjeta za upis predmeta. Predmet je u korelaciji s kolegijima Elementarna matematika 2 i Teorija kodiranja i kriptografija.

## 1.3. Očekivani ishodi učenja za predmet

Očekuje se da će nakon odslušanog kolegija i položenog ispita studenti:

- analizirati osnovna svojstva cijelih brojeva te ih argumentirano primijeniti na jednostavne probleme u teoriji brojeva vezane uz djeljivost i algoritme djeljivosti (A6, B7, D6, E6, F6),
- računati koristeći modularnu aritmetiku, rješavati kongruencijske jednadžbe te sustave kongruencija (A7, B7, D6, E6, F6),
- argumentirano primijeniti kvadratni zakon reciprociteta i formule za računanje Legendreovog simbola na rješavanje kvadratnih kongruencija (A6, B7, D6, E6, F6),
- opisati prikazivost cijelih brojeva kvadratnim formama u jednostavnijim slučajevima te argumentirano usporediti i klasificirati različite kvadratne forme (A6, B7, D6, E6, F6),
- prikazati i analizirati osnovne multiplikativne funkcije i njihova svojstva te argumentirano provjeriti i prezentirati veze među njima (A6, B6, D6, E6, F6),
- definirati osnovne tipove diofantskih jednadžbi i argumentirano opisati načine njihova rješavanja (A6, B7, D6, E6, F6),
- definirati eliptičke krivulje, analizirati njihova osnovna svojstva te opisati važne otvorene probleme (A6, B6, D6, E6, F6),
- argumentirano primijeniti metode teorije brojeva u analizi kriptosustava s javnim ključem (A7, B7, D6, E6, F6),
- opisati i analizirati algebarske i analitičke metode u teoriji brojeva te ih argumentirano primijeniti na važne probleme teorije brojeva (A6, B6, D6, E6, F6).

## 1.4. Okvirni sadržaj predmeta

**Djeljivost.** Najveći zajednički djelitelj. Euklidov algoritam. Prosti brojevi.

**Kongruencije.** Eulerov teorem. Kineski teorem o ostacima. Primitivni korijeni i indeksi.

**Kvadratni ostaci.** Legendreov simbol. Kvadratni zakon reciprociteta. Svojstva djeljivosti Fibonaccijevih brojeva.

**Kvadratne forme.** Redukcija binarnih kvadratnih formi. Sume dva i četiri kvadrata.

**Aritmetičke funkcije.** Eulerova i Möbiusova funkcija. Distribucija prostih brojeva.

**Diofantske jednadžbe.** Linearne diofantske jednadžbe. Pitagorine trojke. Pellova jednadžba.

**Eliptičke krivulje.**

**Kriptografija.** Primjena teorije brojeva u kriptografiji javnog ključa.

## 1.5. Vrste izvođenja nastave

- predavanja
- seminari i radionice
- vježbe
- e-učenje
- terenska nastava
- praktična nastava
- praktikumska nastava

- samostalni zadaci
- multimedija i mreža
- laboratorijski rad
- projektna nastava
- mentorski rad
- konzultativna nastava
- ostalo

## 1.6. Komentari

-

## 1.7. Oblici praćenja studenata i način vrednovanja rada studenata tijekom nastave



Tijekom semestra prate se i boduju kvaliteta aktivnog sudjelovanja u nastavi, domaće zadaće, kolokviji i programski zadaci. Na završnom ispitu se pismeno ili usmeno provjerava poznavanje i razumijevanje sadržaja obrađenog na predavanjima.

### KOLOKVIJI

- Tijekom semestra bit će zadana dva pismena kolokvija sa zadacima iz teorije brojeva.
- Svaki kolokvij traje 120 minuta i održava se u unaprijed dogovorenom terminu.
- Ukupan **maksimalni broj bodova iz kolokvija je 40** (20+20).

### DOMAĆE ZADAĆE

- Tijekom semestra zadaju se svakom studentu domaće zadaće sa zadacima iz teorije brojeva za samostalno rješavanje.
- Domaće zadaće se objavljuju i na web stranicama kolegija.
- Rješavanje zadataka iz domaćih zadaća provjerava se na vježbama dva puta u toku semestra.
- Ukupan **maksimalan broj bodova iz domaćih zadaća je 10** (5+5).

### PROGRAMSKI ZADACI

- Jednom u semestru zadaju se programski zadaci koje studenti rješavaju ukoliko žele.
- Programski zadaci objavljuju se i na web stranicama kolegija.
- Boduju se s **maksimalno 10 bodova**.
- Studenti rješavaju zadane programske zadatke u dogovorenom programskom jeziku i, ukoliko predaju rad i dogovorenom vremenu, u mogućnosti su ostvariti bodove.

### AKTIVNO SUDJELOVANJE U NASTAVI

- Student je dužan redovno i aktivno sudjelovati u nastavi.
- Aktivno sudjelovanje na predavanjima uključuje pažljivo praćenje nastave i uključivanje u razgovor o pojedinim temama.
- Tijekom semestra na predavanjima će biti dana dva kratka testa znanja u svrhu provjere praćenja i razumijevanja gradiva obrađenog na predavanjima.
- Testovi će se sastojati od kraćih teorijskih pitanja i pitanja vezanih uz jednostavniju primjenu.
- Testovima znanja moguće je ostvariti **maksimalno 10 bodova** (5+5).

Na vježbama će studenti aktivno stjecati znanje svojim sudjelovanjem u rješavanju zadataka. U zadnjem tjednu nastave bit će organizirane **popravne aktivnosti** na kojima će studenti moći pisati propušteni kolokvij ili provjeru domaće zadaće ili pak pisati zamjenski kolokvij umjesto jednog, lošije bodovanog, kolokvija zbog kojeg nisu uspjeli prikupiti dovoljno bodova za pristup ispitu. S detaljima vezanim uz popravne aktivnosti studenti će biti upoznati na nastavi te kroz obavijesti na web stranicama kolegija.

## 2. SUSTAV OCJENJIVANJA

### 2.1. Ocjenjivanje i vrednovanje rada studenata tijekom nastave te način polaganja ispita

Rad studenta na predmetu će se vrednovati i ocjenjivati tijekom nastave i na završnom ispitu. **Ukupan broj bodova koje student može ostvariti tijekom nastave je 70** (ocjenjuju se opisane aktivnosti studenata). Kroz sve oblike kontinuiranog praćenja i vrednovanja studenata tijekom nastave treba ukupno skupiti barem 50% mogućih ocjenskih bodova da bi se moglo pristupiti ispitu. Također, student mora ispuniti minimalne uvjete za pristup ispitu. Na ispitu je moguće ostvariti **maksimalno 30**



SVEUČILIŠTE U RIJECI  
ODJEL ZA MATEMATIKU

Sveučilište u Rijeci • Odjel za matematiku

Radmile Matejčić 2 • 51 000 Rijeka • Hrvatska

T: (051) 584-650 • F: (051) 584-699

<http://www.math.uniri.hr> • e-adresa: [math@math.uniri.hr](mailto:math@math.uniri.hr)

**bodova.** Prag prolaznosti na završnom ispitu je 50% uspješno riješenog ispita. Ispit se polaže kao pisana ili usmena provjera znanja.

Studenti koji tijekom nastave ostvare od 0% do 49,9% ocjenskih bodova koje je bilo moguće steći kroz oblike kontinuiranog praćenja i vrednovanja studenata ocjenjuju se ocjenom F (neuspješan), ne mogu steći ECTS bodove i moraju ponovno upisati predmet. Isto vrijedi i za studente koji u tri ponuđena ispitna roka ne polože završni ispit.

## 2.2. Minimalni uvjeti za pristup ispitu/prolaznu ocjenu

AKTIVNOST KOJA SE BODUJE	MINIMALNI BROJ BODOVA
Kolokviji	20
<b>UKUPNO:</b>	35 (tijekom nastave potrebno je skupiti 50% od mogućeg broja bodova te ostvariti minimalni uvjet na broj bodova iz kolokvija)
<b>OSTALI UVJETI:</b>	

## 2.3. Formiranje konačne ocjene

Na temelju ukupnog zbroja ocjenskih bodova stečenih tijekom nastave i na završnom ispitu određuje se konačna ocjena prema sljedećoj raspodjeli:

OCJENA	BODOVI
5 (A)	od 90 do 100 ocjenskih bodova
4 (B)	od 75 do 89,9 ocjenskih bodova
3 (C)	od 60 do 74,9 ocjenskih bodova
2 (D)	od 50 do 59,9 ocjenskih bodova
1 (F)	od 0 do 49,9 ocjenskih bodova

## 3. LITERATURA

### 3.1. Obvezna literatura

1. Baker: *A Concise Introduction to the Theory of Numbers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
2. Dujella A., Maretić M.: *Kriptografija*, Element, Zagreb, 2007.
3. I. Niven, H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery: *An Introduction to the Theory of Numbers*, Wiley, New York, 1991.

### 3.2. Dodatna literatura

1. A. Dujella: *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.
2. K. H. Rosen: *Elementary Number Theory and Its Applications*, Addison-Wesley, Reading, 1993.
3. K. Chandrasekharan: *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1968.
4. H. E. Rose: *A Course in Number Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1995.
5. W. M. Schmidt: *Diophantine Approximation*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
6. B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

## 4. DODATNE INFORMACIJE O PREDMETU

### 4.1. Pohađanje nastave

Studenti su dužni informirati se o nastavi s koje su izostali. Ne tolerira se nikakav oblik remećenja nastave te korištenje mobitela za vrijeme nastave.

### 4.2. Način informiranja studenata

Svi relevantni podaci i obavijesti o kolegiju bit će objavljeni u okviru online kolegija. Osobna odgovornost studenta je biti redovito informiran.

#### 4.3. Ostale relevantne informacije

Od studenata se očekuje visok stupanj samostalnosti i odgovornosti u radu. Tijekom rada na kolegiju poticat će se aktivni pristup učenju.

Prilikom izrade zadataka predviđenih planom i programom kolegija studenti se ne smiju služiti tuđim tekstom kao svojim. Svako neovlašteno preuzimanje tuđega teksta bez navođenja izvora smatra se intelektualnom krađom i podložno je sankcijama predviđenim važećim aktima! Uratke koje studenti budu slali putem sutava Merlin trebaju pripremiti prema uputi koju će dobiti na nastavi.

#### 4.4. Način praćenja kvalitete i uspješnosti izvedbe predmeta

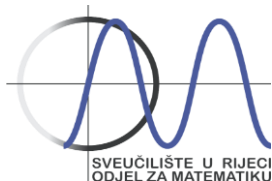
Kvaliteta održane nastave prati se u skladu s aktima Odjela za matematiku i Sveučilišta u Rijeci. Krajem semestra provodit će se anonimna anketa u kojoj će studenti evaluirati kvalitetu održane nastave iz ovog predmeta. Nakon završetka semestra provest će se analiza uspješnosti studenata iz ovog predmeta.

#### 4.5. Ispitni rokovi

<b>Zimski</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 11.2.2021. u 12:00</li> <li>• 25.2.2021. u 12:00</li> </ul>
<b>Proletni izvanredni</b>	25.3.2021. u 14:00

### 5. SATNICA IZVOĐENJA NASTAVE I ODRŽAVANJA KOLOKVIJA U AKADEMSKOJ GODINI 2020./2021.

DATUM	VRIJEME	OBLIK NASTAVE	NAZIV TEME	GRUPA	PROSTORIJA
2.10.2020.	12:15-13:45	P	Djeljivost. Najveći zajednički djeljitelj. Euklidov algoritam. Prosti brojevi. Jednoznačna faktorizacija.	Svi	O-335
5.10.2020	8:15-9:45	AV	Djeljivost. Najveći zajednički djeljitelj. Najmanja zajednička mjera. Euklidov algoritam i prošireni Euklidov algoritam, primjena. Prosti brojevi.	Svi	O-335
9.10.2020.	12:15-13:45	P	Kongruencije. Kineski teorem o ostacima. Eulerov teorem. Wilsonov teorem. Primitivni korijeni i indeksi.	Svi	O-335
12.10.2020.	8:15-9:45	AV	Kongruencije i primjene. Mali Fermatov teorem. Eulerov teorem. Wilsonov teorem. Kineski teorem o ostacima.	Svi	O-335
16.10.2020.	12:15-13:45	P	Kvadratni ostaci. Legendreov simbol. Kvadratni zakon reciprociteta.	Svi	O-335
19.10.2020.	8:15-9:45	AV	Kvadratni ostaci. Legendreov simbol i primjene. Jacobijev simbol i primjene. Kvadratni zakon reciprociteta.	Svi	O-335
23.10.2020.	12:15-13:45	P	Jacobijev simbol. Svojstva djeljivosti Fibonaccijevih brojeva.	Svi	O-335
26.10.2020.	8:15-9:45	AV	Jacobijev simbol. Svojstva djeljivosti Fibonaccijevih brojeva.	Svi	O-335
30.10.2020.	12:15-13:45	P	Kvadratne forme. Redukcija binarnih kvadratnih formi.	Svi	O-335
2.11.2020.	8:15-9:45	AV	Kvadratne forme. Redukcija binarnih kvadratnih formi. Ekvivalentne kvadratne forme.	Svi	O-335
6.11.2020.	12:15-13:45	P	Sume dva kvadrata. Sume četiri kvadrata.	Svi	O-335
9.11.2020.	8:15-9:45	AV	Sume dva kvadrata. Sume četiri kvadrata.	Svi	O-335



13.11.2020.	12:15-14:15	AV	Prvi kolokvij	Svi	O-335
16.11.2020.	8:15-9:45	P	Aritmetičke funkcije.	Svi	O-335
20.11.2020.	12:15-13:45	P	Distribucija prostih brojeva.	Svi	O-335
23.11.2020.	8:15-9:45	AV	Aritmetičke funkcije i primjena.	Svi	O-335
27.11.2020.	12:15-13:45	P	Linearne diofantske jednačbe. Pitagorine trojke.	Svi	O-335
30.11.2020.	8:15-9:45	AV	Linearne diofantske jednačbe. Pitagorine trojke.	Svi	O-335
4.12.2020.	12:15-13:45	P	Pellove i pellovske jednačbe.	Svi	O-335
7.12.2020.	8:15-9:45	AV	Pellove i pellovske jednačbe.	Svi	O-335
11.12.2020.	12:15-13:45	P	Eliptičke krivulje i primjena.	Svi	O-335
14.12.2020.	8:15-9:45	AV	Eliptičke krivulje i primjena.	Svi	O-335
18.12.2020.	12:15-13:45	P	Testovi prostosti i metode faktorizacije.	Svi	O-335
21.12.2020.	8:15-9:45	AV	Testovi prostosti i metode faktorizacije.	Svi	O-335
8.1.2021.	12:15-13:45	P	Ideja kriptosustava s javnim ključem. RSA kriptosustav.	Svi	O-335
11.1.2021.	8:15-9:45	AV	Ideja kriptosustava s javnim ključem. RSA kriptosustav.	Svi	O-335
15.1.2021.	12:15-14:15	AV	Drugi kolokvij	Svi	O-335
18.1.2021.	8:15-9:45	P	Ostali kriptosustavi s javnim ključem.	Svi	O-335
22.1.2021.	12:15-13:45	AV	Ostali kriptosustavi s javnim ključem.	Svi	O-335
25.1.2021.	8:15-9:45	P	Završno predavanje . <b>Popravne aktivnosti.</b>	Svi	O-335

*Moguća su manja odstupanja u realizaciji izvedbenog plana.*

*Do 40% planirane nastave može biti održano online.*

P – predavanja

AV – auditorne vježbe

VP – vježbe u praktikumu

MV – metodičke vježbe

S – seminari